Задания для обучающихся формируются в электронном виде, размещается на сайте колледжа. Выполнение заданий контролируется через электронную почту.

Дисциплина, курс	Математика и информатика, 1 курс	
Сроки исполнения	Задание	Форма отчетности
13-18.04.2020	Вспомнить изученную ранее в школе тему «Обобщение понятия степени». Изучить и законспектировать тему «Показательная функция». Просмотреть видео с образцом решения задач, записать в тетрадь, решить подобные задачи самостоятельно	Прислать фото конспекта
20-25.04.2020	Изучить и законспектировать тему «Логарифмическая функция». Просмотреть видео с образцом решения задач, записать в тетрадь, решить подобные задачи самостоятельно	Прислать фото конспекта
27-30.04.2020	Изучить и законспектировать тему «Производная показательной и логарифмической функций».	Прислать фото конспекта

Консультации проводятся в электронном виде через почту, Viber, по телефону. Время консультаций: понедельник – пятница с 9:00 до 15:00

Приложение 1

1. Вспомнить изученную ранее в школе тему «Обобщение понятия степени».

Определение. ***Корнем n-й степени из числа a* называется такое число, n-я степень которого равна a.**

Как известно, на промежутке $[0; \infty)$ эта функция при любом n возрастает и принимает все значения из промежутка $[0; \infty)$. По теореме о корне (п. 8) уравнение $x^n = a$ для любого $a \in [0; \infty)$ имеет неотрицательный корень, и притом только один. Его называют *арифметическим корнем n-й степени из числа a* и обозначают $\sqrt[n]{a}$; число n называется *показателем корня*, а само число a — *подкоренным выражением*. Знак корня $\sqrt{\ }$ называют также *радикалом*.

Определение. ***Арифметическим корнем n-й степени из числа a* называют неотрицательное число, n-я степень которого равна a.**

2. Основные свойства корней. Напомним известные вам свойства арифметических корней n-й степени.

Для любого натурального n, целого k и любых неотрицательных чисел a и b выполнены равенства:

1^0. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

2^0. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$.

3^0. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ $(k > 0)$.

4^0. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$ $(k > 0)$.

5^0. $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ (если $k \leqslant 0$, то $a \neq 0$).

34. Степень с рациональным показателем

Вам уже знакомо понятие степени числа с целым показателем. Выражение a^n определено для всех a и n, кроме случая $a = 0$ при $n \leqslant 0$. Напомним свойства таких степеней.

Для любых чисел a, b и любых целых чисел m и n справедливы равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \; a^m : a^n = a^{m-n} \; (a \neq 0);$$
$$(a^m)^n = a^{mn};$$
$$(ab)^n = a^n \cdot b^n; \; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \; (b \neq 0);$$
$$a^1 = a; \; a^0 = 1 \; (a \neq 0).$$

Отметим также следующее свойство:

Если $m > n$, то $a^m > a^n$ при $a > 1$ и $a^m < a^n$ при $0 < a < 1$.

В этом пункте мы обобщим понятие степени числа, придав смысл выражениям типа $2^{0,3}$, $8^{\frac{5}{7}}$, $4^{-\frac{1}{2}}$ и т. д. Естественно при этом дать определение так, чтобы степени с рациональными показателями обладали теми же свойствами (или хотя бы их частью), что и степени с целым показателем. Тогда, в частности, n-я степень числа $a^{\frac{m}{n}}$ должна быть равна a^m. Действительно, если свойство $(a^p)^q = a^{pq}$ выполняется, то

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

Последнее равенство означает (по определению корня n-й степени), что число $a^{\frac{m}{n}}$ должно быть корнем n-й степени из числа a^m.

Определение. ***Степенью числа $a > 0$ с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$,*** где m — целое число, а n — натуральное $(n > 1)$, называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

Итак, по определению

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (1)$$

Покажем теперь, что при сформулированном выше определении степени с рациональным показателем сохраняются основные свойства степеней, верные для любых показателей (разница заключается в том, что приводимые далее свойства верны только для положительных оснований).

Для любых рациональных чисел r и s и любых положительных a и b справедливы равенства:

1^0. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

2^0. $a^r : a^s = a^{r-s}$.

3^0. $(a^r)^s = a^{rs}$.

4^0. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$.

5^0. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Отметим следующие два свойства степеней с рациональными показателями:

6^0. Пусть r — рациональное число и $0 < a < b$. Тогда

$a^r < b^r$ при $r > 0$,

$a^r > b^r$ при $r < 0$.

7^0. Для любых рациональных чисел r и s из неравенства $r > s$ следует, что

$a^r > a^s$ при $a > 1$,

$a^r < a^s$ при $0 < a < 1$.

2. Изучить и законспектировать тему «Показательная функция».

Посмотреть видео по ссылке:

https://resh.edu.ru/subject/lesson/3841/main/225577/

Записать:

2. Свойства показательной функции.

Определение. **Функция, заданная формулой $y = a^x$ (где $a > 0$, $a \neq 1$), называется *показательной функцией с основанием a*.**

Сформулируем основные свойства показательной функции (их доказательство выходит за рамки школьного курса).

1. Область определения — множество R действительных чисел.
2. Область значений — множество R_+ всех положительных действительных чисел.

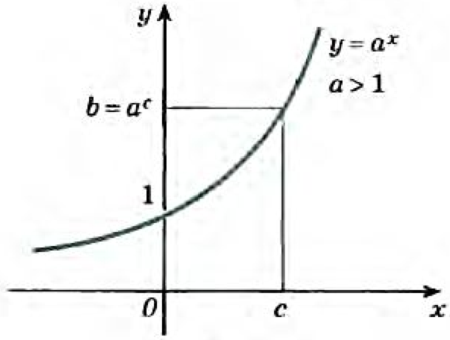


Рис. 133

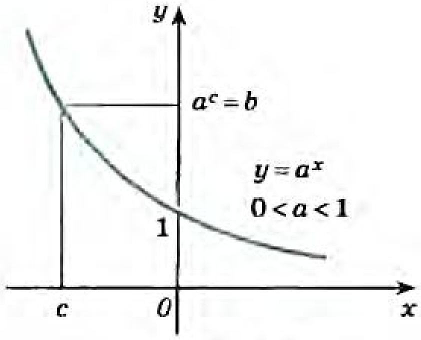


Рис. 134

3. При $a > 1$ функция возрастает на всей числовой прямой; при $0 < a < 1$ функция убывает на множестве $\mathbf{R}$.

Графики показательных функций для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$ изображены на рисунках 133—134.

4. При любых действительных значениях x и y справедливы равенства

$$a^x a^y = a^{x+y}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$
$$(ab)^x = a^x b^x; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$
$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Эти формулы называют *основными свойствами степеней.*

Свойства 3 и 4 означают, что для функции $y = a^x$, определенной на всей числовой прямой, остаются верными свойства функции $y = a^x$, которая сначала была определена только для рациональных x (см. свойства 1^0—7^0, п. 34).

3. Решение задач

1. Уравнения. Рассмотрим простейшее показательное уравнение

$$a^x = b, \tag{1}$$

где $a > 0$ и $a \neq 1$. Область значений функции $y = a^x$ — множество положительных чисел. Поэтому в случае $b < 0$ или $b = 0$ уравнение (1) не имеет решений.

Просмотреть видео с образцом решения задач, записать в тетрадь, решить подобные задачи самостоятельно

Контрольные вопросы:

Решите уравнения (460—464).

460.— а) $4^x = 64$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$; в) $3^x = 81$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{64}$.

461.— а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; б) $\sqrt{8^{x-3}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$;

в) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$; г) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$.

462.— а) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$; б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7}$;

в) $\sqrt{3^x} = 9$; г) $2^{x^2+2x-0.5} = 4\sqrt{2}$.

463.— а) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$; б) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 15$;

в) $4^{x+1} + 4^x = 320$; г) $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77$.

464.— а) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$; б) $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$;

в) $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$; г) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$.

Записать конспект в тетрадь, письменно решить примеры. Прислать фото конспекта на электронную почту преподавателя до 23 апреля 2020 г.

Результат – зачет/незачет

Приложение 2

Логарифмическая функция

Посмотреть видео по ссылкам:

https://resh.edu.ru/subject/lesson/5753/main/272579/
https://resh.edu.ru/subject/lesson/3823/main/198629/
https://resh.edu.ru/subject/lesson/3834/main/198660/

Записать:

1. Логарифм. Вернемся к уравнению $a^x = b$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. Как показано в предыдущем пункте, это уравнение не имеет решений при $b \leqslant 0$ и имеет единственный корень в случае $b > 0$. Этот корень называют логарифмом b по основанию a и обозначают $\log_a b$, т. е.

$$a^{\log_a b} = b.$$

> Определение. ***Логарифмом числа b по основанию a*** **называется показатель степени, в которую нужно возвести основание *a*, чтобы получить число *b*.**

Формулу $a^{\log_a b} = b$ (где $b > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$) называют *основным логарифмическим тождеством.*

2. Основные свойства логарифмов. При работе с логарифмами применяются следующие их свойства, вытекающие из свойств показательной функции:

При любом $a > 0$ ($a \neq 1$) и любых положительных x и y выполнены равенства:

1^0. $\log_a 1 = 0.$

2^0. $\log_a a = 1.$

3^0. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$

4^0. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$

5^0. $\log_a x^p = p \log_a x$

для любого действительного p.

Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы. Докажем, например, *формулу перехода* от одного основания логарифма к другому основанию:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

38. Логарифмическая функция

Пусть a — положительное число, не равное 1.

> Определение. **Функцию, заданную формулой**
>
> $$y = \log_a x, \qquad (1)$$
>
> **называют *логарифмической функцией с основанием a*.**

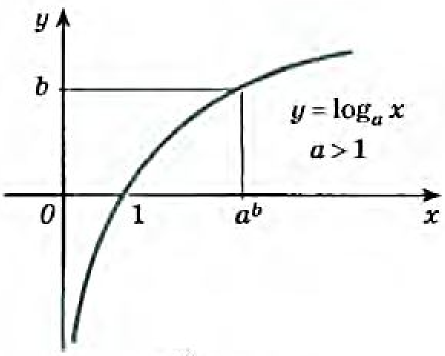
Перечислим основные свойства логарифмической функции.

> 1. Область определения логарифмической функции — множество всех положительных чисел $\boldsymbol{R}_+$, т. е. $D(\log_a) = \boldsymbol{R}_+$.

Действительно, как отмечалось в предыдущем пункте, каждое положительное число x имеет логарифм по основанию a.

> 2. Область значений логарифмической функции — множество всех действительных чисел.

> 3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает (при $a > 1$) или убывает (при $0 < a < 1$).



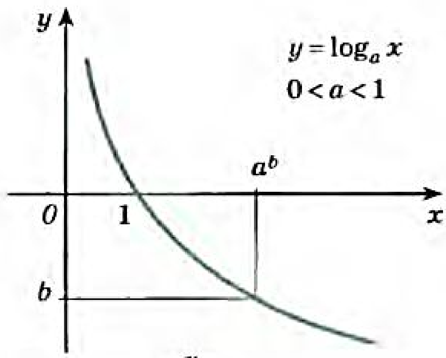


Рис. 135

Опираясь на доказанные свойства, нетрудно построить график функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ (рис. 135, *а*) и $0 < a < 1$ (рис. 135, *б*).

> Графики показательной и логарифмической функций, имеющих одинаковое основание, симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 136).

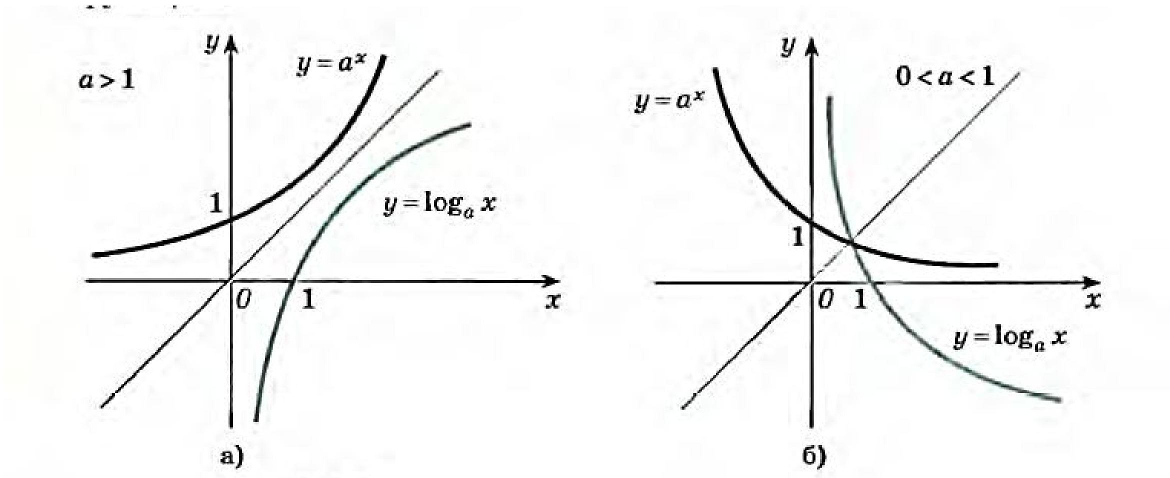


Рис. 136

Просмотреть видео с образцом решения задач, записать в тетрадь, решить подобные задачи самостоятельно

Рассмотрим простейшее логарифмическое уравнение $\log_a x = b$.

Задачи:

№№ 513, 514, 518, 519, 520

Решите уравнения (512—515).

512. а) $9^x = 0{,}7$; б) $0{,}3^x = 7$; в) $2^x = 10$; г) $10^x = \pi$.

513. а) $\log_5 x = 2$; б) $\log_{0,4} x = -1$; в) $\log_9 x = -\frac{1}{2}$; г) $\lg x = 2$.

514. а) $\log_{\frac{1}{2}} (2x - 4) = -2$; б) $\log_\pi (x^2 + 2x + 3) = \log_\pi 6$;

в) $\log_{0,3} (5 + 2x) = 1$; г) $\log_2 (3 - x) = 0$.

515. а) $0{,}2^{4 - x} = 3$; б) $5^{x^2} = 7$; в) $3^{2 - 3x} = 8$; г) $7^{2x} = 4$.

Решите уравнения (518—520).

518. а) $\log_a x = 2 \log_a 3 + \log_a 5$;

б) $\lg (x - 9) + \lg (2x - 1) = 2$;

в) $\log_a x = \log_a 10 - \log_a 2$;

г) $\log_3 (x + 1) + \log_3 (x + 3) = 1$.

519. а) $\frac{1}{2} \log_2 (x - 4) + \frac{1}{2} \log_2 (2x - 1) = \log_2 3$;

б) $\lg (3x^2 + 12x + 19) - \lg (3x + 4) = 1$;

в) $\lg (x^2 + 2x - 7) - \lg (x - 1) = 0$;

г) $\log_5 (x^2 + 8) - \log_5 (x + 1) = 3 \log_5 2$.

520.— а) $\log_4^2 x + \log_4 \sqrt{x} - 1{,}5 = 0$; б) $\lg^2 x - \lg x^2 + 1 = 0$;

в) $\log_5^2 x - \log_5 x = 2$; г) $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 = 0$.

Записать конспект в тетрадь, письменно решить примеры. Прислать фото конспекта на электронную почту преподавателя до 27 апреля 2020 г.

Результат – зачет/незачет

Приложение 3

Производная показательной и логарифмической функций

1. Число *e*. В предыдущих пунктах графики показательной функции изображались в виде гладких линий (без изломов), к которым в каждой точке можно провести касательную. Но существование касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 равносильно ее дифференцируемости в x_0. Поэтому естественно предположить, что показательная функция дифференцируема во всех точках области определения.

> Существует такое число большее 2 и меньшее 3 (это число обозначают буквой e), что показательная функция $y = e^x$ в точке 0 имеет производную, равную 1, т. е.
>
> $$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to 1 \text{ при } \Delta x \to 0. \qquad (1)$$

Функцию e^x часто называют *экспонентой.*

2. Формула производной показательной функции.

> Теорема 1. **Функция e^x дифференцируема в каждой точке области определения, и**
>
> $$(e^x)' = e^x.$$

Число e положительно и отлично от 1, поэтому определены логарифмы по основанию e.

Определение. ***Натуральным логарифмом*** **(обозначается ln) называется логарифм по основанию** e:

$$\ln x = \log_e x. \tag{2}$$

По основному логарифмическому тождеству для любого положительного числа $e^{\ln a} = a$. Поэтому a^x может быть записано в виде

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}. \tag{3}$$

Выведем формулу производной показательной функции при произвольном значении a.

Теорема 2. **Показательная функция a^x дифференцируема в каждой точке области определения, и**

$$(a^x)' = a^x \ln a. \tag{4}$$

Следствие. Показательная функция непрерывна в каждой точке своей области определения, т. е. $a^x \to a^{x_0}$ при $x \to x_0$.

3. **Первообразная показательной функции.**

Теорема 3. **Первообразной для функции a^x на R является функция $\frac{a^x}{\ln a}$.**

Докажем теперь, что *производная логарифмической функции* для любого x из области определения находится по формуле

$$\ln' x = \frac{1}{x}. \tag{1}$$

По основному логарифмическому тождеству $x = e^{\ln x}$ при всех положительных x, т. е. в этом равенстве справа и слева стоит одна и та же функция (определенная на R_+). Поэтому производные x и $e^{\ln x}$ равны, т. е.

$$x' = (e^{\ln x})'. \tag{2}$$

Записать конспект в тетрадь. Прислать фото конспекта на электронную почту преподавателя до 30 апреля 2020 г.

Результат – зачет/незачет